

平成29年度 冬期課外講習 2年数学（応用）

テーマ 『ジグソー法』で三角関数分野の入試問題にチャレンジしよう

ねらい 三角関数についての諸知識を統合して活用できるようにする

- ・ 2倍角の公式による $2\theta$ と「2次」の互換性について理解する
- ・ 式中の $\sin\theta$ と $\cos\theta$ は、三角関数の合成により $\sin(\theta+\alpha)$ に統合して扱えることを理解する
- ・ 角が取る範囲に注意して、三角方程式、不等式を解くことができる

参加者 2学年生徒8名

文理系を分けず応用コースを選択した生徒であり、学習意欲は高く普段の授業への取り組みも良好である。基礎的な計算の技能はあるが、数学的な思考に長けているとは言えず、1ヶ月程前に学んだ三角関数の新出事項が定着していない事が考えられる。

期間 12月26日（火）、27（水）、28（木）の3日間

時間 1コマ60分

指導の流れ

1日目

①今日の活動の説明

8人の受講生を、問題A、Bの2題を用意してそれぞれを担当する2班に分け、さらにA、BをA-1~4、B-1~4に分ける（エキスパート課題）ことを説明する。くじ引き形式により各々の担当を決める。

②既習事項と取り組む問題の確認

A、Bそれぞれで班を作り（机を寄せる）、問題を精読して関連するであろう既習事項を挙げさせる。例えばA問題では「 $6\sin\theta\cos\theta$ 」は「 $3\times 2\sin\theta\cos\theta$ 」であることを示して、2倍角の公式の導出を促したり「 $f(\theta) < 3 + \sqrt{3}$ 」の不等号に注目させ、三角不等式について確認するよう誘導したりする。

③ ②で挙げられたことを念頭に各自A-1~4、B-1~4の課題に取り組む。自分の課題が終了した生徒へは、元の問題AまたはBにまずは1人で取り組むよう指示する。

④各自の課題が済んだところを見計らって、グループで問題AまたはBに取り組ませる。この際、A-1~4、B-1~4をそれぞれ順番に記載していけば解答の骨格はできるが、それぞれのパーツのつながりを捉え、解答として説明の不足があれば補って完成させ理解を深めることを指摘する。

2日目

①今日の活動の説明

グループを組み替える。A、B-1、2を1班、A、B-3、4を1班にして、問題A、Bを教え合うことを説明する。

②与えられた模範解答をそのまま見せても相手の理解にはつながらないことを示し、聞く側の質問する力が「教え合い」の成否に影響することを指摘しておく。聞く側の「持つ知識」にも注意させる。

③援助しながら「教え合い」を進めさせる。アイデア（別解）や工夫した説明、適切な質問は支持する。

3日目

①今日の活動の説明

問題A，Bに2問加えたテスト形式の演習を行うことを説明する。

②問題A，Bの解法を各自で振り替えさせる。

③ねらい 三角関数についての諸知識を統合して活用できるようにする

- ・2倍角の公式による $2\theta$ と「2次」の互換性について理解する
- ・式中の $\sin\theta$ と $\cos\theta$ は、三角関数の合成により $\sin(\theta+\alpha)$ に統合して扱えることを理解する
- ・角が取る範囲に注意して、三角方程式、不等式を解くことができる

を教員から解説し、A，Bに加えた2問を解く上で活用できることを指摘する。

④演習に取り組みさせる。

⑤2学年末で取り組む内容としては難易度が高いが、今後の学習形態を先取りした講習であったことを説明し、高難位の問題でも平易なレベルに分割して取り組むことができることを指摘して、講習のまとめとする。

実施して

意図した活動をさせることはできたが、理解の深化につながったかは確信が持てない生徒の状況であった。用意した課題に取り組むには、授業の学習内容の定着が不十分で時間が予定よりもかかってしまった。教え合いをしている内に理解に混乱が生じたり、主題とは関係のない簡単な計算にミスが出たりした。解答作成上で、分けたパーツ（エキスパート課題）を合成して使う部分には苦勞していた。担当する問題A，Bを解くだけでなく、理解のための時間を十分に取るか、教員による再解説が必要であったかもしれない。

生徒が現在保持している知識の内容と質、および数学に関する語彙も含めた説明する力や聞く力への見立てが十分ではなかったのが反省点であり、教員によるリサーチと生徒自身のモニタリングにつながる活動を入れた構成にすべきであった。

参加生徒の全員が来年度の受験で数学を使用するということであり、今後の学習活動に見通しを持たせることができたのは収穫であった。

□ A  $f(\theta) = 6 \sin \theta \cos \theta + 2\sqrt{3} \cos^2 \theta$  とおく。ただし  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  とする

$f(\theta) < 3 + \sqrt{3}$  をみたす  $\theta$  の範囲を求めよ

よって求める  $\theta$  の範囲は  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$

A-1 z（正弦、余弦の加法定理 正弦、余弦の2倍角の公式）

I 空欄を埋めよ

$$\sin(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{10cm}}$$

II 空欄を埋めよ

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \sin(\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}) = \sin \underline{\hspace{1cm}} \cos \underline{\hspace{1cm}} + \cos \underline{\hspace{1cm}} \sin \underline{\hspace{1cm}} \\ &= \underline{\hspace{10cm}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos(\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}) = \cos \underline{\hspace{1cm}} \cos \underline{\hspace{1cm}} - \sin \underline{\hspace{1cm}} \sin \underline{\hspace{1cm}} \\ &= \underline{\hspace{10cm}} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \underline{\hspace{10cm}} \quad (\text{サインのみを用いて}) \\ \underline{\hspace{10cm}} \quad (\text{コサインのみを用いて}) \end{array} \right. \end{aligned}$$

III 2倍角の公式を用いて、 $f(\theta)$  を  $\sin 2\theta$ ,  $\cos 2\theta$  を用いて表せ

## A-2 z（三角関数の合成）

I 空欄を埋めよ

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \underline{\hspace{4cm}} (\theta + \alpha)$$

$$\text{ただし } \cos \alpha = \underline{\hspace{2cm}}, \sin \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

II 次の式を  $r \sin(\theta + \alpha)$  または  $r \sin(2\theta + \alpha)$  の形に表せ。  
ただし,  $r > 0$ ,  $-\pi < \alpha < \pi$  とする

$$(1) \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$$

$$(2) \sin \theta - \cos \theta$$

$$(3) \sin 2\theta + \sqrt{3} \cos 2\theta$$

III 三角関数の合成を用いて,  $f(\theta) = 3 \sin 2\theta + \sqrt{3} \cos 2\theta + \sqrt{3}$  を  
 $\sin(2\theta + \alpha)$  を用いて表せ ( $\alpha$  の値も求めよ)

□-3z（三角方程式 三角不等式）

I 次の方程式を解け。ただし  $0 \leq \theta < 2\pi$  とする

$$(1) \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(2) 2\sqrt{3} \sin \theta = 3$$

II 次の不等式を解け

$$(1) 0 \leq \theta < 2\pi \text{ のとき, } \cos \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(2) 0 \leq X < 2\pi \text{ のとき, } \sin X < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

III  $\frac{\pi}{6} \leq X \leq \frac{7}{6}\pi$  のとき,  $2\sqrt{3} \sin X < 3$  をみたす  $X$  の範囲を求めよ

□A-4 z（不等式が示す角の範囲）

I  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  のとき、以下の  $\theta$  の式がとる値の範囲を答え、さらにその範囲を座標平面上に図示せよ

(1)  $2\theta$

(2)  $2\theta + \frac{\pi}{6}$

II 以下の不等式が示す角  $X$  の範囲を、座標平面上に図示せよ

(1)  $\frac{\pi}{6} \leq X < \frac{\pi}{3}$

(2)  $\frac{2}{3}\pi < X \leq \frac{7}{6}\pi$

III 以下の不等式をみたす  $\theta$  の範囲を、それぞれ答えよ

(1)  $\frac{\pi}{6} \leq 2\theta + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}$

(2)  $\frac{2}{3}\pi < 2\theta + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7}{6}\pi$

- $0 \leq \theta < 2\pi$  とする。関数  $f(\theta) = \sin 2\theta + \sqrt{2} \sin \theta + \sqrt{2} \cos \theta - 2$  の最大値と最小値、およびそのときの  $\theta$  を求めよ。

以上より、 $\theta = \frac{\pi}{4}$  のとき最大値 1 をとり、 $\theta = \frac{11}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi$  のとき最小値  $-\frac{7}{2}$  をとる

□B-1 z（三角関数の相互関係）

I 空欄を埋めよ

$$\tan \theta = \frac{\quad}{\quad}, \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \underline{\quad}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \underline{\quad}$$

II  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$  のとき,  $\sin \theta \cos \theta$  の値を求めよ

III  $x = \sin \theta + \cos \theta$  とおくと,  $2 \sin \theta \cos \theta$  を  $x$  を用いた式で表せ

IV 2倍角の公式「 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ 」を用いて,  $f(\theta)$  を  $x$  を用いた式で表せ

□B-2 z (三角関数の合成)

I 空欄を埋めよ

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \underline{\hspace{4cm}} (\theta + \alpha)$$

ただし  $\cos \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$  ,  $\sin \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$

II 次の式を  $r \sin(\theta + \alpha)$  の形に表せ。ただし,  $r > 0$ ,  $-\pi < \alpha < \pi$  とする

(1)  $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$

(2)  $\sin \theta - \cos \theta$

(3)  $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$

III 「 $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき  $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ 」であることを用いて,  $x = \sin \theta + \cos \theta$  の  
とる値の範囲を求めよ

□B-3 z（2次関数の最大・最小）

I  $y = x^2 + \sqrt{2}x - 3$  を平方完成し、その頂点の座標を答えよ

II  $y = x^2 + \sqrt{2}x - 3$  のグラフを描け。ただし、定義域は  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$  とする

III  $y = x^2 + \sqrt{2}x - 3$  ( $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ) の最大値と最小値、およびそのときの  $x$  を求めよ

□B-4 z（三角方程式）

I 以下をみたす  $\theta$  を求めよ。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$  とする

(1)  $\sin \theta = 1$

(2)  $\sin \theta = -\frac{1}{2}$

II 以下をみたす  $X$  を求めよ。ただし、 $\frac{\pi}{4} \leq X < \frac{9}{4}\pi$  とする

(1)  $\sin X = 1$

(2)  $\sin X = -\frac{1}{2}$

III 以下をみたす  $\theta$  を求めよ。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$  とする

(1)  $\sin \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right) = 1$

(2)  $\sin \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{2}$

確認テスト

I  $f(\theta) = 6 \sin \theta \cos \theta + 2\sqrt{3} \cos^2 \theta$  とおく。ただし  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  とする

$f(\theta) < 3 + \sqrt{3}$  をみたす  $\theta$  の範囲を求めよ

II  $0 \leq \theta < 2\pi$  とする。関数  $f(\theta) = \sin 2\theta + \sqrt{2} \sin \theta + \sqrt{2} \cos \theta - 2$  の最大値と最小値、およびそのときの  $\theta$  を求めよ。

Ⅲ  $0 < \theta < \pi$  とする。x の2次方程式

$$x^2 + 2(\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta)x + (2 + \sqrt{2}) = 0 \cdots \textcircled{1}$$

が異なる2つの実数解を持つような $\theta$ の値の範囲を以下に従って求めよ。

(1) ①の判別式をDとしてDまたは $\frac{D}{4}$ を $\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ を用いて表せ。

(2)  $D > 0$  または  $\frac{D}{4} > 0$  を変形して  $\sin(\square) > \square \cdots \textcircled{2}$  の形で表せ。

(3) ②を解くことで、①が異なる2つの実数解を持つような $\theta$ の値の範囲を求めよ。

Ⅳ  $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$  とする。関数  $f(\theta) = 3 \cos 2\theta + 4 \cos \theta + 7$  の最大値, 最小値を以下に従って求めよ。

- (1)  $\cos \theta = t$  とおく。t の取りうる値の範囲を求めよ。
- (2)  $\cos 2\theta$  を t を用いた2次式で表せ。
- (3)  $y = f(\theta)$  とおいて, y を t の2次式で表し, (1) で求めた t の値の範囲に注意してその最大値と最小値を求めよ。